Option "Mathématiques" (M')

DURÉE : 3 heures

MATHEMATIQUES APPLIQUEES

PRÉLIMINAIRE

L'ensemble des entiers naturels strictement positifs est noté $\mathbb{N}^*$. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes. On dit que la série de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ converge dans $\mathbb{C}$ si et seulement si les deux séries de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_{-n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent dans $\mathbb{C}$. Par définition : si s_1 et s_2 désignent les sommes des deux séries $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_{-n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsqu'elles existent, la somme de $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est $s_1 + s_2$ et elle est notée $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$.

Soit $x \longmapsto a_n(x)$ pour $n \in \mathbb{Z}$, une suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. La série de terme général $(a_n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ converge uniformément pour $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si les deux séries de terme général $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_{-n}(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent uniformément pour $x \in \mathbb{R}$.

On admettra le résultat suivant :

soit $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ une famille de nombres complexes,

si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{p\in\mathbb{Z}} |a_{n,p}| < +\infty$ alors $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{p\in\mathbb{Z}} a_{n,p} = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_{n,p}$.

I

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de nombres complexes.

Montrer que les 4 conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $(\forall p \in \mathbb{N})\ \sup_{n\in\mathbb{Z}} |n^p a_n| < +\infty$

(2) $(\forall p \in \mathbb{N})\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n^p a_n| < +\infty$

(3) $(\forall p \in \mathbb{N})\ \sup_{n\in\mathbb{Z}} (1 + |n|^2)^p |a_n| < +\infty$

(4) $(\forall p \in \mathbb{N})\ \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1 + |n|^2)^p |a_n| < +\infty$

II

On notera $\bar{z}$ le nombre complexe conjugué de z.

1° Soient $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ deux suites de nombres complexes.

Montrer que :

$$\left| \sum_r^s a_n \bar{b}_n \right| \leqslant \left(\sum_r^s |a_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_r^s |b_n|^2 \right)^{1/2}$$

pour tout couple $(r, s) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $r \leqslant s$.

Soit E l'espace vectoriel des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes, telles que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 < +\infty$. Montrer que si a et b sont éléments de E, la série de terme général $(a_n \bar{b}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est convergente et vérifie :

$$\left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \bar{b}_n \right| \leqslant \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |b_n|^2 \right)^{1/2}$$

Montrer que $a \longmapsto \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \right)^{1/2}$ est une norme sur E.

2° Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ périodique de période 2π et continue.

On note :

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx \text{ pour } n \in \mathbb{Z}.$$

En utilisant la quantité $f(x) - \sum_r^s \hat{f}(n)\, e^{inx}$ pour $(r, s) \in \mathbb{Z}^2$ et $r \leqslant s$, montrer que la suite $\left(\hat{f}(n)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$ appartient à E.

Si f est continûment dérivable jusqu'à l'ordre p pour $p \in \mathbb{N}$ et si $f^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de f, calculer $\widehat{f^{(k)}}(n)$ en fonction de $\hat{f}(n)$ pour $k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant k \leqslant p$.

Montrer que si $p \geqslant 1$ on a $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty$. (On pourra utiliser II 1°.)

.../...

E.N.S. SAINT-CLOUD & FONTENAY 1978

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail